

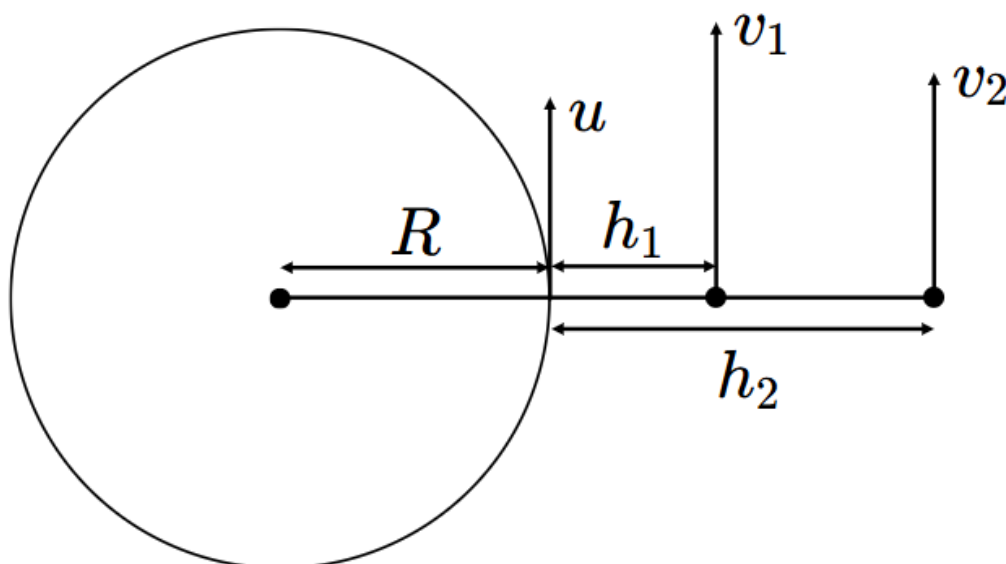
Всероссийская олимпиада школьников
Муниципальный этап
Астрономия, 2025-2026 учебный год
9 классы
Критерии проверки
Все задания по 8 баллов

Задание 1

Два спутника Земли движутся по круговым орбитам в экваториальной плоскости в направлении вращения планеты. В один момент оба спутника оказались в зените для некоторого пункта. Известно, что первый спутник летает на высоте 5 000 км над Землёй, а второй – на высоте 10 000 км. Во сколько раз угловая скорость движения первого спутника по небу больше угловой скорости второго?

Решение:

Из условий задачи известно, что высота первого спутника $h_1 = 5\,000$ км, высота второго спутника $h_2 = 10\,000$ км, а из справочных данных следует, что радиус Земли $R = 6\,378$ км, период обращения Земли $T = 23\text{ч } 56\text{мин}$, масса Земли $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг. Изобразим схематично описанную ситуацию, отметив u – скорость вращения точки экватора под обоими спутниками, V_1 – скорость вращения первого спутника, а V_2 – скорость вращения второго спутника:



Из определения скорости вращения следует, что скорость вращения экватора u равна:

$$u = \frac{2\pi R}{T}$$

Считая скорости спутников круговыми, определим их через формулу расчёта круговой скорости для двух объектов на различных расстояниях от центра тяготения:

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R + h_1}}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{GM}{R + h_2}}$$

Теперь необходимо перейти к угловым скоростям движения спутников для наблюдателя в точке под ними w . Для этого из полученных круговых скоростей необходимо вычесть скорость вращения самого наблюдателя и поделить на расстояние до спутника:

$$w_1 = \frac{V_1 - u}{h_1} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R + h_1}} - \frac{2\pi R}{T}}{h_1} = 225^\circ/\text{ч}$$

$$w_2 = \frac{V_2 - u}{h_2} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R + h_2}} - \frac{2\pi R}{T}}{h_2} = 92^\circ/\text{ч}$$

Окончательно имеем искомое отношение:

$$\frac{w_1}{w_2} = 2.44$$

Ответ: 2.44

Критерии оценивания:

Записано выражение для круговой скорости	1 балл
Учтена скорость точки экватора	2 балла
Записано выражение для угловой скорости движения спутников	2 балла
Найдены угловые скорости спутников ИЛИ записано выражение для их соотношения	1 балл
Получен правильный числовой результат	2 балла
Итого	8 баллов

Задание 2

В параллельной вселенной работает обратный закон Кеплера – если в нашем мире период обращения планет вокруг Солнца с радиусом орбиты a можно посчитать как $T^2 = a^3$ (T в годах, a в а. е.), то там период обращения считается как $T^2 = \frac{1}{a^3}$ (T в годах, a в а. е.). Считая, что на вид параллельная вселенная идентична нашей (существует такая же Солнечная система с такими же планетами и такими же радиусами их орбит), найдите планеты, скорость которых превысит скорость света. Считать орбиты планет круговыми, а их радиусы – равными большому полуосю орбит планет реальной Солнечной системы.

Решение:

Для того, чтобы определить, скорости каких планет при заданных условиях превысят скорость света, удобно действовать от обратного: определить, для какого радиуса орбиты скорость планеты будет равна скорости света. Для дальнейших вычислений переведем скорость света в единицы измерения а.е. в год, чтобы иметь возможность использовать её вместе с третьим законом Кеплера в удобной форме:

$$c = 300\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}} = 300\,000 \cdot \frac{\text{а.е.}}{1.496 \cdot 10^8} \cdot \frac{3600 \cdot 24 \cdot 365.26}{\text{год}} = 63\,300 \frac{\text{а.е.}}{\text{год}}$$

Воспользуемся соотношением для связи между периодом обращения планеты и большой полуоси её орбиты, записанного в условии:

$$T^2 = \frac{1}{a^3}$$

Тогда квадрат скорости планеты V можно выразить через большую полуось орбиты как:

$$V^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = 4\pi^2 a^5$$

Приравняем полученное выражение к квадрату скорости света для определения условия, необходимого для достижения планетой скорости света в ходе своего орбитального движения:

$$c^2 = 4\pi^2 a^5$$

Выражая отсюда критерий на большую полуось a , имеем:

$$a = \sqrt[5]{\frac{c^2}{4\pi^2}} = 39.9 \text{ а. е.}$$

Таким образом для того, чтобы планета в своём орбитальном движении достигала скорости света, необходимо, чтобы её большая полуось была больше либо равна полученному значению. Как следует из условий, планет, удовлетворяющих этому требованию, в системе нет.

Корректным также является решение, в котором значения скорости рассчитывается для каждой планеты по отдельности с использованием приведённых выше соотношений, а затем сопоставляется со значением скорости света

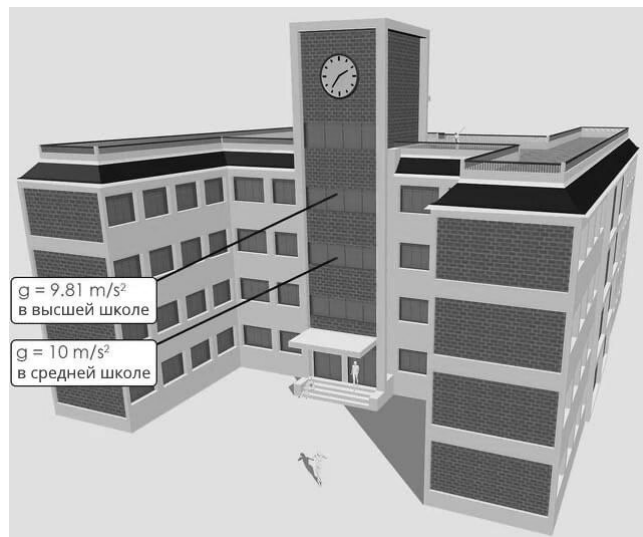
Ответ: таких планет нет.

Критерии оценивания:

Использовано выражение для скорости орбитального движения планеты	2 балла
Скорость орбитального движения планеты выражена через величину большой полуоси её орбиты	2 балла
Проверены орбитальные скорости всех планет ИЛИ сформулирован критерий минимальной большой полуоси для сверхсветового движения	3 балла
Сделано верное заключение об отсутствии планет со сверхсветовыми скоростями орбитального движения	1 балл
Итого	8 баллов

Задание 3

На некотором не вращающемся теле находится школа. В средней школе ускорение свободного падения составляет 10 м/с^2 , а в высшей – 9.81 м/с^2 . Считая, что высшая школа находится выше средней на 3 метра, а высота здания сильно меньше радиуса тела, найти радиус тела. Можно ли его назвать планетой?



Решение:

Обозначим расстояние от центра тела до средней школы R , а массу тела – M . Тогда высшая школа находится на расстоянии $R + h$ от центра, где $h = 3 \text{ м}$.

Тогда ускорение свободного падения для средней школы можно записать как:

$$g_1 = \frac{GM}{R^2} = 10 \text{ м/с}^2$$

Ускорение свободного падения для высшей школы:

$$g_2 = \frac{GM}{(R + h)^2} = 9.81 \text{ м/с}^2$$

Для выражения h через R , возьмём отношение известных ускорений:

$$\frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{R + h}{R}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$$

Извлечём квадратный корень из левой и правой части:

$$\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\frac{h}{R} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} - 1$$

Откуда окончательно выразим радиус планеты:

$$R = \frac{h}{\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} - 1} = \frac{3}{\sqrt{\frac{10}{9.81}} - 1} = 310 \text{ м}$$

Радиус тела слишком мал, чтобы его можно было назвать планетой.

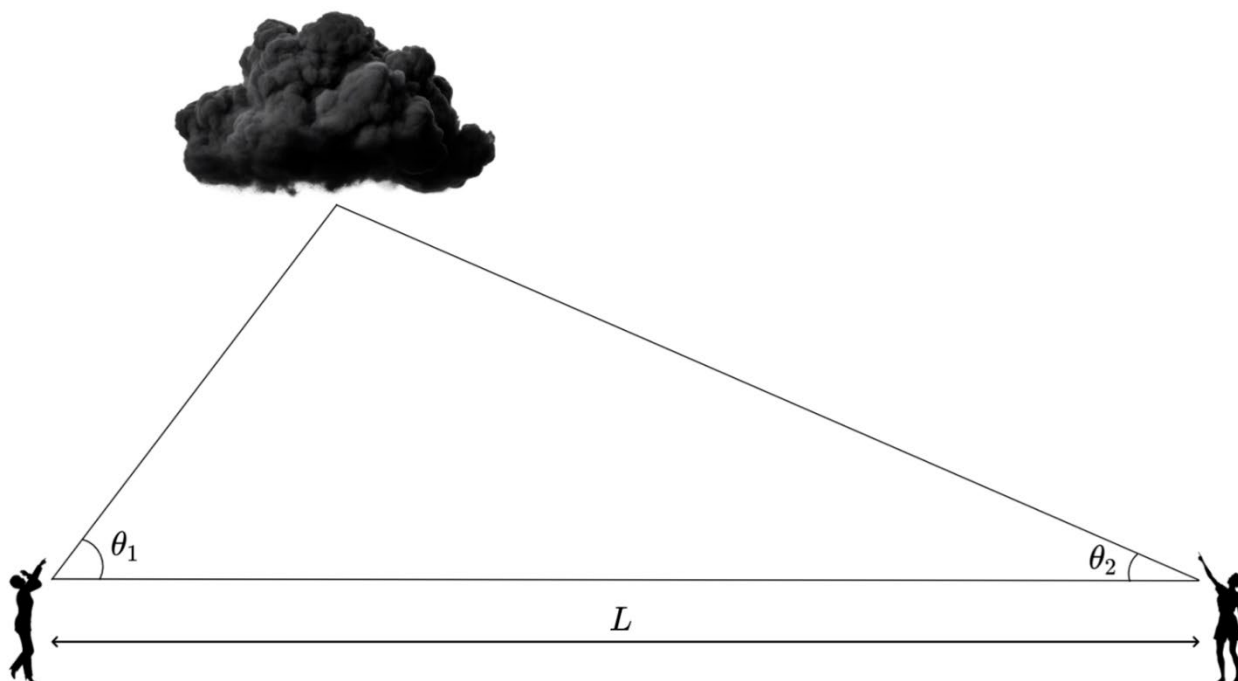
Ответ: 310 м, не планета.

Критерии оценивания:

Записано ускорение свободного падения для средней школы	1 балл
Записаны ускорения свободного падения для высшей школы	1 балл
Записано выражение для отношения ускорений	2 балла
Выражен радиус тела	1 балл
Получен правильный числовой результат	2 балла
Сделан правильный вывод	1 балл
Итого	8 баллов

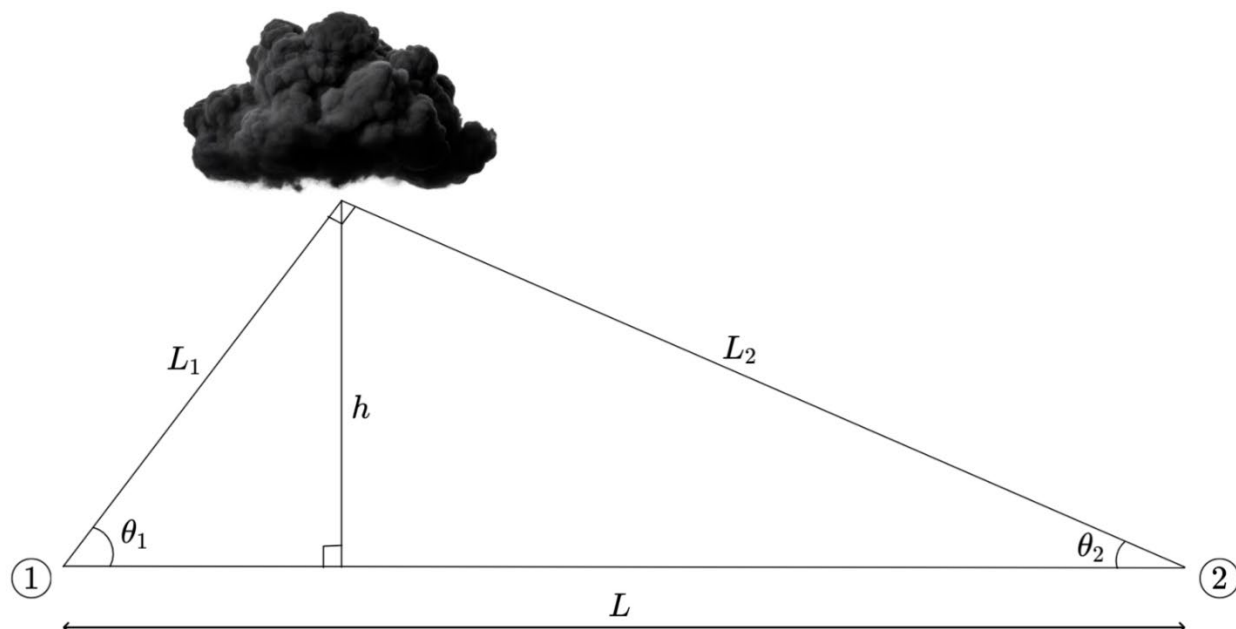
Задание 4

Два юных астронома решили вычислить высоту некоторого типа облаков. Для этого они разошлись на расстояние $L = 170$ км друг от друга и в момент, изображённый на рисунке, измерили угол между облаком и земной поверхностью. Они получили углы $\theta_1 = 55^\circ$, $\theta_2 = 35^\circ$. Помогите астрономам найти высоту облака в километрах. Земную поверхность между наблюдателями считать плоской.



Решение:

Построим рисунок, соответствующий описанию задачи, обозначив искомую высоту облака h , расстояние между наблюдателями L , а также измеренные ими углы θ_1 и θ_2 :



Важно отметить, что сумма измеренных углов $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, а значит построенный треугольник прямоугольный. Таким образом, искомая высота облака h есть высота прямоугольного треугольника, опущенная из его прямого угла.

Тогда, пользуясь определением синуса угла, в большом треугольнике мы можем выразить расстояние от одного наблюдателя до облака через синус противолежащего угла и расстояние между наблюдателями L :

$$L_1 = L \sin(\theta_2)$$

$$L_2 = L \sin(\theta_1)$$

Так как высота облака – это длина перпендикуляра к поверхности, два полученных меньших треугольника также являются прямоугольными, а определённые выше расстояния от наблюдателя до облака – их гипотенузы. Таким образом, достаточно рассмотреть один из этих треугольников и вновь воспользоваться определением синуса, чтобы отыскать высоту облака. Например, для треугольника с углом θ_2 получим:

$$h = L_2 \sin(\theta_2) = L \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) = 170 \text{ км} \cdot \sin(35^\circ) \cdot \sin(55^\circ) = 80 \text{ км}$$

Ответ: 80 км

Критерии оценивания:

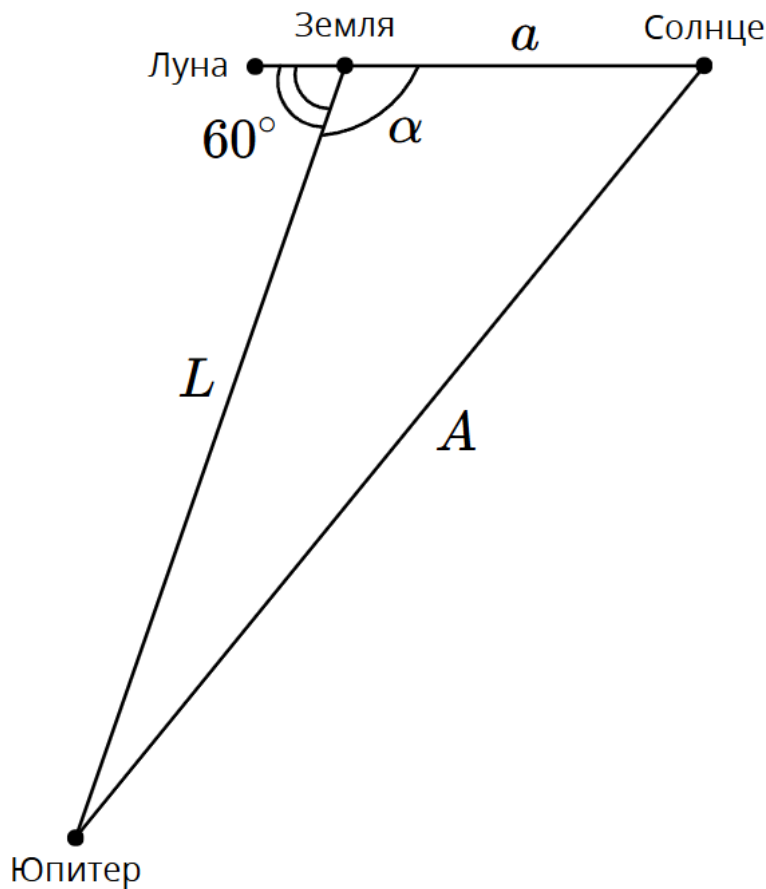
Построен чертёж	2 балла
Записана формула для любого катета треугольника	2 балла
Записана формула для высоты облака	2 балла
Получен правильный числовой результат	2 балла
Итого	8 баллов

Задание 5

Астроном при наблюдении с Земли заметил, что угол между Юпитером и Луной в полнолунии равен 60° . На каком расстоянии от Земли в этот день находился Юпитер? Радиус орбиты Юпитера 5.2 а.е.

Решение:

Построим рисунок, соответствующий описанию задачи, учитывая при этом, что по её условию Луна находится в полнолунии, а значит находится на противоположной от Солнца стороне Земли:



Здесь A – радиус орбиты Юпитера, a – радиус орбиты Земли, L – расстояние от Земли до Юпитера.

Заметим, что по условию задачи угол между направлениями на Луну и Юпитер с Земли равен 60° , а значит угол между направлениями на Солнце и Юпитер равен:

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

так как Луна, Земля и Солнце лежат на одной прямой.

Теперь для полученного треугольника можно воспользоваться теоремой косинусов, записав следующее выражение:

$$A^2 = L^2 + a^2 - 2 \cdot L \cdot a \cdot \cos(\alpha)$$

Подставляя значение $\cos(120^\circ)$ и перенося все слагаемые в одну часть, получаем квадратное уравнение относительно величины L :

$$L^2 + a \cdot L + a^2 - A^2 = 0$$

Дискриминант этого уравнения равен:

$$D = a^2 - 4 \cdot (a^2 - A^2) = 4A^2 - 3a^2$$

Отбрасывая нефизичное решение, окончательно имеем:

$$L = \frac{-a + \sqrt{4A^2 - 3a^2}}{2} = 4.6 \text{ а. е.}$$

Ответ: 4.6 а.е.

Критерии оценивания:

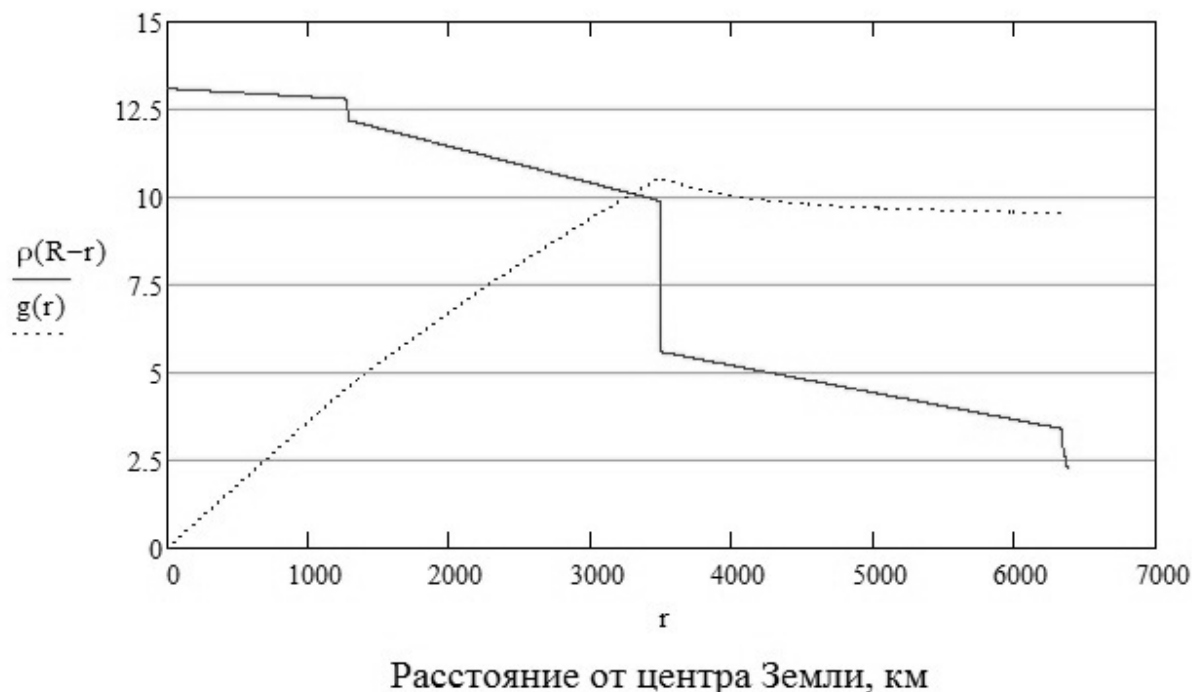
Определено, что Луна находится на одной линии с Землёй и Солнцем с противоположной от Солнца стороны.	1 балл
Выполнен рисунок	1 балл
Определена величина угла между направлениями на Солнце и на Юпитер	1 балл
Использована теорема косинусов	2 балла
Выражение для искомого расстояния преобразовано к квадратному уравнению	1 балл
Получен правильный числовой результат	2 балла
Итого	8 баллов

Задание 6

Перед вами график зависимости плотности земных пород (в г/см³) и ускорения свободного падения от расстояния от центра Земли. С помощью него оцените массу Земли и её среднюю плотность. Радиус Земли 6 400 км.

Примечание: брать массу Земли из справочных данных нельзя.

Формула: Объём шара V считается как $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара.



Решение:

Разобьём график на несколько отрезков с характерными средними значениями ускорения свободного падения: от 0 до 1200 км, от 1200 км до 3500 км, от 3500 км до 6400 км. Оценим средние значения

ускорения свободного падения для выбранных интервалов: 13 г/см³, 11.5 г/см³, 4.5 г/см³. Эти значения необходимо перевести в единицы измерения кг/м³, домножив каждое из них на 1000.

Объём первой области является объёмом шара радиусом 1200 км и может быть определён как:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = 7.23 \cdot 10^9 \text{ км}^3 = 7.23 \cdot 10^{18} \text{ м}^3$$

Объём второй области равен объёму сферы радиусом 3500 км за вычетом объёма первой области:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 - V_1 = 172 \cdot 10^9 \text{ км}^3 = 1.72 \cdot 10^{20} \text{ м}^3$$

Аналогично объём третьей области:

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi R_3^3 - V_2 = 925 \cdot 10^9 \text{ км}^3 = 9.25 \cdot 10^{20} \text{ м}^3$$

Таким образом, совокупная масса земного шара составит:

$$M = V_1\rho_1 + V_2\rho_2 + V_3\rho_3 = 6.24 \cdot 10^{24} \text{ кг} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

Тогда средняя плотность составит:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_3^3} = 5.65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

В ходе решения допустимо разбиение исходного графика на иные интервалы, использование более точных методов аппроксимации и получение конечных результатов в широком диапазоне значений. Правильными считать результаты $M \approx [5.7; 6.8] \cdot 10^{24} \text{ кг}$, $M \approx [5100; 6300] \text{ кг/м}^3$. Допустимо также производить вычисления плотности в г/см³.

Ответ: $M \approx [5.7; 6.8] \cdot 10^{24} \text{ кг}$, $M \approx [5100; 6300] \text{ кг/м}^3$

Критерии оценивания:

График разбит на участки	1 балл
Оценена плотность вещества на различных участках	1 балл
Оценены объёмы, соответствующие участкам	2 балла
Посчитана масса Земли	1 балл
Записано выражение для средней плотности Земли	1 балл
Получен правильный числовой результат	2 балла
Итого	8 баллов